## МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

МГТУ им Н.Э.Баумана Факультет ФН

Кафедра вычислительной математики и математической физики

Соколов Арсений Андреевич

Домашнее задание №3 по основам сеточных методов

## 3 курс, группа ФН11-63Б Вариант 3

Преподаватель

В. А. Кутыркин

« » 2020 г.

Москва, 2020 г.

# Задание 1

### Задание.

Используя метод Рунге-Кутты порядка *𝑚* = 4, четырёхшаговый метод Адамса- Башфорта и метод прогноза-коррекции (с четвёртым порядком точности) най- ти численные решения задачи Коши (шаг сетки *𝑕* = 0*.*05):

{︃ *𝑑𝑥*

*𝑑𝑡*

= 2*𝑁* +3 sin (︁ 2*𝑁* +3 *𝑥*)︁ *, 𝑡 ∈* [0*.*5; 2*.*5]

*𝑥*(0*.*5) = *𝑁*

*𝑁* +(*𝑛−*60)+1

(*𝑁* +*𝑛−*60)*·𝑡*

4

Графически проиллюстрировать сравнение приближённых решений. Исполь- зуя практическое правило Рунге, оценить погрешность приближённого реше- ния по методу Рунге-Кутты порядка *𝑚* = 4.

### Решение.

Подставим значения *𝑛* = 63*, 𝑁* = 3 в систему:

d d 9 *𝑥* (*𝑡*)

(︂ )︂

*𝑥*(*𝑡*) = *𝑥* (*𝑡*) = sin 3*/*2

d*𝑡*

*𝑥*(0*.*5) =

d*𝑡* 7 *𝑡*

3

4

# 1 Метод Рунге-Кутты порядка *𝑚* = 4

Равномерную сетку задаём *𝑏−𝑎*

*𝑕*

2*.*5 0*.*5

0*.*05

+ 1 = *−*

+ 1 = 41 узлами. При *𝑚* = 4

используется рабочая формула вида:

⎧**⎪** *𝑥*0(*𝑡* + *𝑕*) = *𝑥*0(*𝑡*) + *𝑕* (*𝜔*1 + 2*𝜔*2 + 2*𝜔*3 + *𝜔*4) + *𝑂* (︀*𝑕*5)︀

6

⎪⎪

)︀

*𝜔*2 = *𝜔*2 (*𝑡, 𝑥*0(*𝑡*)*, 𝑕*) = *𝑓*

*𝑡* + 1 *𝑕, 𝑥*0(*𝑡*) + 1 *𝑕𝜔*1

**⎪**⎨ *𝜔*1 = *𝜔*1 (*𝑡, 𝑥*0(*𝑡*)*, 𝑕*) = *𝑓* ((︀*𝑡, 𝑥*0(*𝑡*)) )︀

3

3

0

1

2

0

1

2

2

⎪⎪ *𝜔* = *𝜔* (*𝑡, 𝑥* (*𝑡*)*, 𝑕*) = *𝑓* (︀*𝑡* + 2 *𝑕, 𝑥* (*𝑡*) + 2 *𝑕��*

Тогда

⎩ *𝜔*3 = *𝜔*3 (*𝑡, 𝑥*0(*𝑡*)*, 𝑕*) = *𝑓* (*𝑡* + *𝑕, 𝑥*0(*𝑡*) + *𝑕𝜔*3)

*>𝑥*0 = [3*/*4*,* 0*.*8075773070*,* 0*.*8658126486*,* 0*.*9245493314*,* 0*.*9836782141*,* 1*.*043120710*,* 1*.*102818639*,* 1*.*162727898*,* 1*.*222814372*,* 1*.*283051205*,* 1*.*343416927*,*

1*.*403894142*,* 1*.*464468582*,* 1*.*525128421*,* 1*.*585863759*,* 1*.*646666238*,*

1*.*707528745*,* 1*.*768445184*,* 1*.*829410293*,* 1*.*890419506*,* 1*.*951468836*,*

2*.*012554786*,* 2*.*073674272*,* 2*.*134824563*,* 2*.*196003230*,* 2*.*257208106*,*

2*.*318437249*,* 2*.*379688912*,* 2*.*440961521*,* 2*.*502253652*,* 2*.*563564014*,*

2*.*624891431*,* 2*.*686234831*,* 2*.*747593236*,* 2*.*808965748*,* 2*.*870351544*,*

2*.*931749865*,* 2*.*993160014*,* 3*.*054581345*,* 3*.*116013262*,* 3*.*177455211]

# Четырёхшаговый метод Адамса-Башфорта

Первые четыре значения *>𝑥*1 найдены методом Рунге-Кутты порядка *𝑚* = 4

*𝑕*

*𝑥𝑛*+1 = *𝑥𝑛* + 24 (55*𝑓𝑛 −* 59*𝑓𝑛−*1 + 37*𝑓𝑛−*2 *−* 9*𝑓𝑛−*3) *,*

где *𝑓𝑖* = *𝑓* (*𝑡𝑖, 𝑥𝑖*)

Тогда

*>𝑥*1 = [3*/*4*,* 0*.*8075773070*,* 0*.*8658126486*,* 0*.*9245493314*,* 0*.*9836861018*,* 1*.*043132300*,* 1*.*102832799*,* 1*.*162743180*,* 1*.*222830266*,* 1*.*283067324*,* 1*.*343433075*,*

1*.*403910189*,* 1*.*464484454*,* 1*.*525144073*,* 1*.*585879167*,* 1*.*646681390*,*

1*.*707543637*,* 1*.*768459816*,* 1*.*829424670*,* 1*.*890433634*,* 1*.*951482723*,*

2*.*012568439*,* 2*.*073687700*,* 2*.*134837774*,* 2*.*196016232*,* 2*.*257220907*,*

2*.*318449856*,* 2*.*379701333*,* 2*.*440973764*,* 2*.*502265723*,* 2*.*563575919*,*

2*.*624903176*,* 2*.*686246422*,* 2*.*747604678*,* 2*.*808977047*,* 2*.*870362704*,*

2*.*931760892*,* 2*.*993170911*,* 3*.*054592117*,* 3*.*116023912*,* 3*.*177465744]

# Метод прогноза-коррекции (с четвёртым порядком точности)

Прогноз:

(0)

*𝑥*

*𝑛*+1

= *𝑥𝑛*

*𝑕*

+ (55*𝑓𝑛*

24

*𝑛*+1

*−* 59*𝑓*

*𝑛−*1

+ 37*𝑓*

*𝑛−*2

*−* 9*𝑓*

*𝑛−*3)

(0)

*𝑓*

*𝑛*+1

= *𝑓* (︁*𝑡𝑛*+1*, 𝑥*(0) )︁

Коррекция:

(︁

*𝑥𝑛*+1

= *𝑥𝑛*

+ *𝑕* 9*𝑓* (0) 24

+ 19*𝑓𝑛*

*−* 5*𝑓*

*𝑛−*1

+ *𝑓*

*𝑛−*2

)︁ *,*

где *𝑓𝑖* = *𝑓* (*𝑡𝑖, 𝑥𝑖*)

*𝑛*+1

Тогда

*>𝑥*2 = [3*/*4*,* 0*.*8075773070*,* 0*.*8658126486*,* 0*.*9245493314*,* 0*.*9836776811*,* 1*.*043119894*,* 1*.*102817667*,* 1*.*162726842*,* 1*.*222813274*,* 1*.*283050089*,* 1*.*343415809*,*

1*.*403893030*,* 1*.*464467482*,* 1*.*525127336*,* 1*.*585862691*,* 1*.*646665188*,*

1*.*707527713*,* 1*.*768444169*,* 1*.*829409296*,* 1*.*890418526*,* 1*.*951467873*,*

2*.*012553839*,* 2*.*073673340*,* 2*.*134823646*,* 2*.*196002328*,* 2*.*257207218*,*

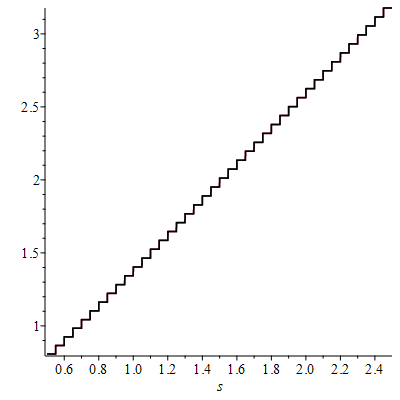
2*.*318436374*,* 2*.*379688050*,* 2*.*440960672*,* 2*.*502252815*,* 2*.*563563188*,*

2*.*624890616*,* 2*.*686234027*,* 2*.*747592442*,* 2*.*808964964*,* 2*.*870350769*,*

2*.*931749100*,* 2*.*993159258*,* 3*.*054580598*,* 3*.*116012523*,* 3*.*177454480]

# Сравнение решений

Построим совмещённые графики:



Можем заметить, что графики совпали.

Оценим погрешность приближенного решения по методу Рунге-Кутты по- рядка *𝑚* = 4, используя практическое правило Рунге. Способ практической оценки абсолютной погрешности метода Рунге-Кутта порядка *𝑚* состоит в сле- дующем:

1. находят при фиксированном (доастаточно большом) *𝑘* N приближен- ное табличное решение *>***u**(*𝑘*) = [*𝑢*0*, 𝑢*1*, . . . , 𝑢𝑘 >* на сетке

*∈*

*𝐴𝑘* = *⟨𝑎* = *𝜏*0*, 𝜏*1*, . . . , 𝜏𝑘* = *𝑏⟩* отрезка [*𝑎*; *𝑏*];

1. находят приближенное табличное решение *>***u***\** = [*𝑢\*, 𝑢\*, . . . , 𝑢\** на сет- ке ⟨︀*𝑎* = *𝜏*0*, 𝜏*0+*𝜏*1 *, 𝜏*1*, 𝜏*1+*𝜏*2 *, 𝜏*2*, . . . , 𝜏𝑘−*1+*𝜏𝑘 , 𝜏𝑘* = *𝑏*⟩︀ и, затем, составляют век-

(*𝑘*) 0 1 *𝑘⟩*

2

2

2

тор

*>***u***\**

*∼*(*𝑘*)

= [*𝑢\**0*, 𝑢\**1*, . . . , 𝑢\*𝑘⟩*;

1. величину *𝜀* = 1 *||>***u** *−>* **u**(*𝑘*)*||* считают практичекой погрешностью

метода.

Имеем:

2*𝑚−*1

*∼*(*𝑘*)

### Вывод.

**u**

*∼*(41)

*>*

*||*

*>*

*−*

**u**(41)*||*= 0*.*06197620007

Таким образом, можем сделать вывод, что методы Рунге-Кутты порядка *𝑚* = 4, четырёхшаговый метод Адамса-Башфорта и метод прогноза-коррекции (с четвёртым порядком точности) могут успешно применяться для численного решения задачи Коши для нормальных ОДУ.